Ein neuer Blick auf $\mathbb{R}$

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

Ein Vorschlag

Wir definieren eine Abbildung G: $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathrm{S1})$ durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}(x) := \underbrace{\{y \in \mathrm{S1}: \exists t \in \mathbb{Z} \quad y=\exp(2\pi i(t \cdot x))\}}_{\subseteq \mathbb{C}}$$

Theo.:

Beh.:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \\ \left(\begin{array}{l} (\mathrm{G}(x), \cdot) \text{ ist eine endliche} \\ \text{Untergruppe von } (\mathrm{S1}, \cdot) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Theo.:

Beh.:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\ \mathrm{G}(x) = \{1\} \end{array} \right)$$

Theo.:

Beh.:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \\ \left(\begin{array}{lll} \mathbb{Z} & \to & \mathrm{S1} \\ t & \mapsto & \exp(2\pi i(t \cdot x)) \end{array} \right) \text{ ist nicht injektiv} \quad \Leftrightarrow \\ \#(\mathrm{G}(x)) < \infty \end{array} \right)$$

Wir definieren eine Abbildung D: $\mathbb{R} \to \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{D}(x) := \#(\mathrm{G}(x))$$

D ist eine Determinante für rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ ist ein Bündel von Sphären

Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0;1[$ durch

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi(t) := \begin{cases} \left([t]_g\ ; t - [t]_g\right) & \texttt{t>=0} \\ \left(-[-t]_g\ ; t + [-t]_g\right) & \texttt{t<=0} \end{cases}$$

$\left([\ldots]_g\right.$ ist die Gauss-Klammer$\left.\right)$

Dann gilt das folgende:

$$\forall t \in \mathbb{R}\quad t = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$$

Wir definieren eine Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times S^1$ durch

$$\forall t \in \mathbb{R}\quad \Phi(t) := \left(\varphi_1(t)\,;\exp\left(2\pi i \cdot \varphi_2(t)\right)\right)$$

Dann gilt das folgende:

$\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times S^1$ ist eine Bijektion

Weil $\mathbb{Z} \times S^1$ eine kommutative Gruppe ist, erhält man eine Abbildung $\odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$(\mathbb{R};\odot)$ ist eine kommutative Gruppe
$(\mathbb{Q};\odot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R};\odot)$

Vielleicht wäre es eine gute Idee, einmal die folgende Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0;1[$ zu betrachten:

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \ \tilde{\varphi}(t) := \left([t]_g\ ; t - [t]_g\right)$$

Tunneln

Wir definieren eine Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad \lambda(t) \coloneqq \exp\left(2\pi i \cdot \tilde{\varphi}_2(t)\right) + 2\tilde{\varphi}_1(t)$$

Wir definieren eine Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ durch

$$\Lambda \coloneqq \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} S^1(2z)$$

$S^1(2z)$ ist die Einheitssphäre mit Mittelpunkt $2z$

Dann gilt das folgende:

$\lambda\colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \Lambda$ ist eine Bijektion